Ad-soyad :

Numara :

Cevap Anahtarı

Lineer Cebir II Final Sınavı Soruları **15.06.2021**

1) Aşağıdaki ifadelerin yanına doğru ise D, yanlış ise Y yazınız.

(D) $\det A \neq 0$ ise $AX = B$ lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır (4 p).

(D) Sonlu bir kümenin her permütasyonu ayrık dairesel permütasyonların çarpımı olarak yazılabilir (4 p).

(Y) Her karakteristik değere tek bir karakteristik vektör karşılık gelir (4 p).

(Y) Her kare matrisin tersi vardır (4 p).

(D) İki satırı aynı olan kare matrisin determinantı sıfırdır (4 p).

2) $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ L(x,y,z) = (x+y+z, -y, 4y+3z)$ lineer dönüşümünün öz değerlerini ve öz vektörlerini bulunuz (20 p).

3) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+(a^2-5)z=a \end{cases}$ lineer denklem sistemi veriliyor. Sistemin

a) çözümünün olmaması için (7 p),

b) sonsuz çözümünün olması için (7 p),

c) tek çözümünün olması için a ne olmalıdır? (6 p)

4) A bir kare matris olmak üzere $\frac{1}{2}(A + A^t)$ matrisinin simetrik olup olmadığını araştırınız. (20 p)

5) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) $\operatorname{adj}A = ?$ (A nın eki) (8 p).

b) detA=? (8 p).

c) A nın tersi var mıdır? Varsa $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}A$ formülünü kullanarak A^{-1} i bulunuz (4 p)

2) $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $L(x,y,z) = \lambda(x,y,z)$ eşitliğini sağlayan λ sayısına öz değer, $(x,y,z) \neq \vec{0}$ vektörüne ise bu öz değere karşılık gelen öz vektör denir.

$$L(x,y,z) = \lambda(x,y,z) \Leftrightarrow (x+y+z, -y, 4y+3z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} x+y+z = \lambda x \\ -y = \lambda y \\ 4y+3z = \lambda z \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (\lambda-1)x - y - z = 0 \\ (\lambda+1)y = 0 \\ -4y + (\lambda-3)z = 0 \end{matrix}$$

Homojen lineer denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümü için katsayılar determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -4 & \lambda-3 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\lambda = \mp 1, \lambda = 3}_{\text{öz değerler}}$$

(2. satıra göre)

$$\lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-R_1 \\ \frac{R_2}{2}}]{R_2/2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2R_2+R_3]{-R_2+R_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{array}{ccc} x & y & z \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x serbest, y ve z temel değişken

$\Rightarrow x = t, \quad y = 0, \; z = 0$

$\Rightarrow \lambda = 1$ e karşılık gelen öz vektörler $t \neq 0, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(x,y,z) = (t,0,0)$ şeklindedir.

$$\lambda = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x, y$ temel, z serbest değişken $\Rightarrow z = t$ dersek

$x = 0, \; y = -z = -t$

$\Rightarrow \lambda = -1$ için öz vektörler

$$(x,y,z) = (0,-t,t), \; t \in \mathbb{R}, \; t \neq 0$$

şeklindedir

$\lambda=3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ x, y temel, z serbest değişken

$\Rightarrow$ $z=t$ dersek $x=\frac{t}{2}$, $y=0$ olup öz vektörler

$(x,y,z)=(\frac{t}{2},0,t)$, $t\in\mathbb{R}$, $t\neq 0$

şeklindedir.

3) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2-5 & a \end{array}\right] \xrightarrow[-R_1+R_3]{-R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right]$

a) $a^2-4=0$, $a-2\neq 0$ yani $a=-2$ ise son satır kötü satır olup çözüm yoktur.

b) $a^2-4=0$, $a-2=0 \Rightarrow a=2$ ise x ve y temel değişken, z serbest değişken olur $\Rightarrow$ bir parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

c) $a^2-4\neq 0 \Rightarrow a\neq \mp 2$ olursa tüm değişkenler temel değişken olur ve tek çözüm vardır.

4) $\frac{1}{2}(A+A^t)$ simetriktir $\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}(A+A^t)\right]^t = \frac{1}{2}(A+A^t)$

$$\left[\frac{1}{2}(A+A^t)\right]^t = \frac{1}{2}(A+A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t+(A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t+A)$$

$$=\frac{1}{2}(A+A^t)$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(A+A^t)$ simetrik bir matristir.

5) a) $A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=2$, $A_{12}=-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1$, $A_{13}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-4$

$A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-7$, $A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-7$, $A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=7$

$A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-6$, $A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-3$, $A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -7 & -7 & 7 \\ -6 & -3 & 5 \end{bmatrix}^{t} = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -6 \\ 1 & -7 & -3 \\ -4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

b) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10 - 17 = -7$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 18 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

c) $\det A \neq 0$ olup A^{-1} vardır.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -2/7 & 1 & 6/7 \\ -1/7 & 1 & 3/7 \\ 4/7 & -1 & -5/7 \end{bmatrix}$$